代数幾何学シンポジウム記録
1981年度 pp.153-180

CUBIC EQUIVALENCEとCOHOMOLOGY

名大・理 斉藤 博

代数閉体k上の非特異射影代数多様体Vを考えよう。Vの次元をm, $p+r=m$とする。Vのr-cycleのつくるChow群、即ち、V上のr-cycleの有理同値類群を$CH_r(V)=CH^p(V)$とする。

$$CH(V)=\bigoplus_{0\le p\le m} CH^p(V)=\bigoplus_{0\le r\le m} CH_r(V)$$

は、余次元pを次数にもつcommutative graded ringとなり, VのChow ringと呼んだ。Chow群については、$CH^0(V)=\mathbb{Z}\cdot[V]\simeq\mathbb{Z}$であり（特にことわらなければ多様体は既約とする）, $CH^1(V)$は、VのPicard群で、"良く知られている"。$CH^p(V)$ $(p>1)$については余り解っていない。1930年代から、Severiによって、主として曲面の場合に、その上の0-cycleが調べられているが、厳密でなく、又理解し難い所も多い。(例えば[Se]).

然し、MumfordはSeveriのtechnicを使い次の定理

を示した。

定理[M] $k=\mathbb{C}$ とする。$\dim V=2$, $H^0(V,\Omega_V^2)\neq 0$ ならば、どんな $d>0$ に対しても

$$S^dV\times S^dV \longrightarrow CH_0(V)_{\deg 0}$$

は全射でない。ここで、S^dV は V の d 次対称積で、V 上の次数 d の正の 0-cycle 全体と同一視され、$CH_0(V)_{\deg 0}$ は $CH_0(V)$ の中で次数 0 のもののつくる部分群、又写像は、$(X,Y)\longmapsto(X-Y)$ の類である。

直観的には、この定理は $CH_0(V)_{\deg 0}$ に多様体の構造が入らないことを示している。

§1. Roitman の結果。

Roitman[R1, R2]は上の定理を $\dim V>2$ の場合に拡張・精密化した。我々はその一部を復習し、その一般化を考える。$k=\mathbb{C}$ とする。(実は $\mathrm{ch}\,k=0$, $\mathrm{card}\,k>\aleph_0$ ならばよい)。

定理(1・1) $\{(X,Y)\in S^dV\times S^dV;\ X$ と Y は V 上の 0-cycle として有理同値$\}$ は、$S^dV\times S^dV$ の可算個の閉集合の合併となる。

この系として、次の"Homotopy 定理"がいえる。

3

<u>定理</u>(1.2) S を非特異多様体(完備でなくてもよい)とする。$f, g: S \longrightarrow S^dV$ が morphism で各 $s \in S$(閉点)に対して、$f(s)$ と $g(s)$ は V 上の 0-cycle として有理同値とする。その時、非特異多様体 T, dominant morphism $e: T \longrightarrow S$ 整数 $d', d'' > 0$ と morphism $H: T \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow S^{d'}V \times S^{d''}V$ があり、

$$f \circ e + pr_1 \circ (H|_{T\times 0}) + pr_2 \circ (H|_{T\times\infty}) = g \circ e + pr_1 \circ (H|_{T\times\infty}) + pr_2 \circ (H|_{T\times 0})$$

が成立する。pr_i は $S^{d'}V \times S^{d''}V$ から第 i 成分への射影で等号は T から $S^{d+d'+d''}V$ への morphism としてである。

この定理の仮定で $s \in S$ が閉点であることに注意。$f(s)$ と $g(s)$ を"結ぶ" $\mathbb{P}^1 \times V$ 上の cycle が s について"連続的"と思ってよいというのが定理の主張である。

$\omega \in H^0(V, \Omega_V^q)$ とする。$\pi_i: V^d \longrightarrow V$ を第 i 成分への射影とする時、

$$\sum_{i=1}^{d} \pi_i^* \omega \in H^0(V^d, \Omega_{V^d}^q)$$

は、"対称" 故、S^dV 上の q-form ω_d の標準射影 $V^d \longrightarrow S^dV$ による引き戻しである。(ω_d は Severi が考えている。)
$f: S \longrightarrow S^dV$ が morphism の時、$f^*\omega_d \in H^0(S, \Omega_S^q)$ となる。
従って f に対し、ω に $f^*\omega_d$ を対応させて写像

$$f^\#: H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q)$$

が得られる。

定理(1.3)　(1.2)と同じ仮定の下で，

$$f^\# = g^\# : H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q).$$

この定理を使い易い形に述べる為 0-cycleの族が正則という概念を定義する。

Sを非特異多様体とする。(集合論的)写像 $\kappa : S \longrightarrow CH_0(V)$ が正則とは，可換な図式

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad g \quad} & S^{d_1}V \times S^{d_2}V \\ f \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{\quad \kappa \quad} & CH_0(V) \end{array}$$

が存在し，Tは非特異多様体，gは morphism，fは (separable) proper surjective morphism，πは $\pi(X, Y) = (X - Y)$の類となることである。

系(1.4)　正則写像 $\kappa : S \longrightarrow CH_0(V)$ に対して，

$$\kappa^\# : H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q)$$

を，上の記号で，$\kappa^\#(\omega) = f_*((pr_1 \circ g)^\# \omega - (pr_2 \circ g)^\# \omega)$ で定義すると well-defined，即ち，"κの上にある図式"によらない。

以下では，(1) 上の Roitman の結果を r-cycle $(r \geqq 0)$ に一般化する。(2) 有理同値は adequate equivalence relation (= cycle の順像・逆像及び積と両立する同値関係) の中で最も細かいものであった。(1.3) は、"$f(s)$ と $g(s)$ が有理同値しか違わなければ、$f^{\#}$ と $g^{\#}$ は同じ"、即ち $f^{\#}$ は有理同値の違いを区別しない。それでは、より粗い同値関係(の違い)を区別する、或いはしないかという問題を考える。

§2. r-cycle の場合.

Roitman の結果を r-cycle に拡張するには、標語的には、"S^dV を V の Chow scheme に置き換える"ことにより為される。V の射影空間 $\mathbb{P}^N$ への埋め込み $V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を一つ固定する。V 上の r-cycle に対して、この埋め込みに関する次数を考える。V 上の次数 d の正の r-cycle 全体は projective scheme $C_r(V)_d$ の閉点全体と 1-1 に対応する。更に、非特異多様体 S に対して、S から $C_r(V)_d$ への morphism 全体と、

$$\left\{ Z \;;\; \begin{array}{l} S\times V \text{ 上の余次元 } (\dim V - r) \text{ の cycle で各 } s\in S \text{ に対して} \\ V \text{ 上の cycle } Z(s) \text{ が定義され、その次数は } d \end{array} \right\}$$

は 1-1 に対応する (今 $\mathrm{ch}\, k = 0$ である)。ここで $Z(s)$ は $Z.s\times V = s\times Z(s)$ で定義される cycle である。

$r=0$ の時は $S^dV = C_0(V)_d$ である。§1の(1.1), (1.2)は S^dV を $C_r(V)_d$ に置き換えて、そのまま成り立つ。

<u>定理</u>(2.1) $\{(X,Y)\in C_r(V)_d\times C_r(V)_d;$ XとYはV上のcycleとして有理同値$\}$ は $C_r(V)_d\times C_r(V)_d$ の可算個の閉集合の合併である。

<u>定理</u>(2.2) 非特異多様体 S から $C_r(V)_d$ へのmorphism f, g が、"$\forall \alpha\in S$ に対し、$f(\alpha)$と$g(\alpha)$は V 上の r-cycleとして有理同値" を充すとする。非特異多様体 T, dominant morphism $e: T\longrightarrow S$, 整数 $d', d''>0$, そしてmorphism

$$H: T\times \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}$$

があり、

$$f\circ e + pr_1\circ(H|_{T\times 0}) + pr_2\circ(H|_{T\times\infty}) = g\circ e + pr_1\circ(H|_{T\times\infty}) + pr_2\circ(H|_{T\times 0}).$$

証明は Roitman [R1] と同様である。XとYが有理同値ならば、$\mathbb{P}^1\times V$ 上の cycle Z があり、$Z(a)$ $(a\in\mathbb{P}^1)$ が全て定義でき $Y=Z(\infty)$, $X=Z(0)$. $Z=Z^+-Z^-$ と正・負の部分にわけ(必要なら同じcycleを足して $Z^+, Z^-\neq 0$ とする)、上で注意した様に

$$f: \mathbb{P}^1\to C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}, \quad a\longmapsto (Z^+(a), Z^-(a))$$

(morphism) が得られる。$Y=Z(\infty)$, $X=Z(0)$ より

$$X + pr_1\circ f(0) + pr_2\circ f(\infty) = Y + pr_1\circ f(\infty) + pr_2\circ f(0).$$

逆にこの様に書ければ X と Y は有理同値である。

$\mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''})$ を $\mathbb{P}^1$ から $C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}$ への次数 p の morphism のつくる準射影的 scheme として、morphism

$$\begin{array}{rccc} \Phi^p_{d',d''}: & C_r(V)_d\times C_r(V)_d\times \mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}) & \longrightarrow & C_r(V)_{d+d'+d''}\times C_r(V)_{d+d'+d''} \\ & \psi & & \psi \\ & (X, Y, f) & \longmapsto & (X+pr_2\circ f(0)+pr_1\circ f(\infty),\ Y+pr_1\circ f(\infty)+pr_2\circ f(0)) \end{array}$$

を考える。$\pi^p_{d',d''}$ を射影

$$C_r(V)_d\times C_r(V)_d\times \mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}) \longrightarrow C_r(V)_d\times C_r(V)_d$$

とし $C_r(V)_{d+d'+d''}\times C_r(V)_{d+d'+d''}$ の diagonal を $\Delta_{d+d'+d''}$ とすると、

$$E := \{(X,Y)\in C_r(V)_d\times C_r(V)_d\,;\ X \text{ と } Y \text{ は有理同値}\} = \bigcup_{d',d'',p} \pi^p_{d',d''}\left({\Phi^p_{d',d''}}^{-1}(\Delta_{d+d'+d''})\right)$$

となり、E は可算個の部分集合の合併である。Constructible set $\pi^p_{d',d''}({\Phi^p_{d',d''}}^{-1}(\Delta_{d+d'+d''}))$ の閉包が E に含まれれば、(2.1) は示される。それには、$\pi^p_{d',d''}({\Phi^p_{d',d''}}^{-1}(\Delta_{d+d'+d''}))$ 内の curve C^0 (非特異とも完備とも限らない) の閉包が E に含まれればよい。$C' \subset {\Phi^p_{d',d''}}^{-1}(\Delta_{d+d'+d''})$ を、C^0 を支配する curve, $\bar{C}$ を C' の非特異完備化, $C\subset\bar{C}$ を C' に落ちる点のつくる curve とする。$C\to C'\to C^0\subset C_r(V)_d\times C_r(V)_d$ は $\bar{C}$ からの morphism ψ に拡張できる。$\psi(\bar{C})\subset E$ 即ち、$w\in\bar{C}$ に対し $\psi(w)\in E$ を示せばよい。

$\mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''}) \to C_r(V)_{d'}$, $f\mapsto pr_1\circ f(0)$ と $C\to C'\xrightarrow{proj} \mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'}\times C_r(V)_{d''})$ の合成は $\varphi_1^{(0)}: \bar{C}\longrightarrow C_r(V)_{d'}$ に拡張できる。同様に $\varphi_2^{(0)}: \bar{C}\longrightarrow C_r(V)_{d''}$ と $\varphi_1^{(\infty)}: \bar{C}\to C_r(V)_{d'}$, $\varphi_2^{(\infty)}: \bar{C}\to C_r(V)_{d''}$

("∞" での値) が得られる。 $C' \subset \Phi^{p\,-1}_{d',d''}(\Delta_{d+d'+d''})$ から. $w \in \bar{C}$ に対し

$$pr_1 \circ \psi(w) + \varphi_1^{(0)}(w) + \varphi_2^{(\infty)}(w) = pr_2 \circ \psi(w) + \varphi_1^{(\infty)}(w) + \varphi_2^{(0)}(w).$$

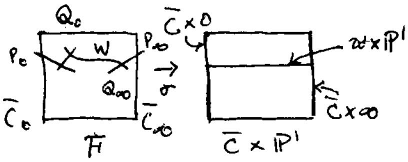
従って $\psi(w) \in E$ をいうには, $\varphi_1^{(0)}(w)$ と $\varphi_1^{(\infty)}(w)$, $\varphi_2^{(0)}(w)$ と $\varphi_2^{(\infty)}(w)$ が各々有理同値であることを示せば充分。

$$\begin{array}{ccccc} C \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^p(\mathbb{P}^1, Cr(V)_{d'} \times Cr(V)_{d''}) \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Cr(V)_{d'} \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & (f, a) & \longmapsto & pr_1 \circ f(a) \end{array}$$

は有理写像 $h : \bar{C} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow Cr(V)_{d'}$ を決め, $\varphi_1^{(0)} = h|_{\bar{C}\times 0}$, $\varphi_1^{(\infty)} = h|_{\bar{C}\times\infty}$.

$\bar{C} \times \mathbb{P}^1$ を blow-up して, h を morphism にする。

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & \bar{C} \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Cr(V)_{d'} \end{tikzcd}$$



$\bar{C} \times 0$, $\bar{C} \times \infty$, $w \times \mathbb{P}^1$ の proper transform を $\bar{C}_0$, $\bar{C}_\infty$, W とする。

$P_0 = \sigma^{-1}(w \times 0) \cap \bar{C}_0$, $Q_0 = \sigma^{-1}(w \times 0) \cap W$, $P_\infty = \sigma^{-1}(w \times \infty) \cap \bar{C}_\infty$, $Q_\infty = \sigma^{-1}(w \times \infty) \cap W$

とすると, $\varphi_1^{(0)}(w) = \bar{h}(P_0)$, $\varphi_1^{(\infty)}(w) = \bar{h}(P_\infty)$. $W \simeq \mathbb{P}^1$ 故 $\bar{h}(Q_0)$ と $\bar{h}(Q_\infty)$ は有理同値, 又 P_0 と Q_0, P_∞ と Q_∞ も $\mathbb{P}^1$ で結べるから $\bar{h}(P_0)$ と $\bar{h}(Q_0)$, $\bar{h}(P_\infty)$ と $\bar{h}(Q_\infty)$ は有理同値。故に $\varphi_1^{(0)}(w)$ と $\varphi_1^{(\infty)}(w)$ も有理同値。

(2.2) については, $(f, g) : S \longrightarrow Cr(V)_d \times Cr(V)_d$ を考える。仮定より $\mathrm{Im}(f, g) \subset E$. $k = \mathbb{C}$ 故, 適当な d', d'', p に対し, $\mathrm{Im}(f, g)$ の中で $\mathrm{Im}(f, g) \cap \pi^p_{d',d''}(\Phi^{p\,-1}_{d',d''}(\Delta_{d+d'+d''}))$ は dense となる。Fibre 積

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r] \arrow[d] & \Phi^{p\,-1}_{d',d''}(\Delta_{d+d'+d''}) \arrow[d, "\pi^p_{d',d''}"] \\ S \arrow[r, "(f, g)"] & Cr(V)_d \times Cr(V)_d \end{tikzcd}$$

を考え T' の適当な subscheme T をとると, T は非特異で

$e: T \subset T' \longrightarrow S$ は dominant となる。T' のつくり方から,

$$T \subset T' \longrightarrow \Phi_{d'd''}^{\gamma^{-1}}(\Delta_{d+d'+d''}) \xrightarrow{pr_1} \mathrm{Hom}^r(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''})$$

は, $H: T \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}$ を決め, 要求された性質を持つ。

次に $f^{\#}: H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q)$ の対応物を定義する。その為に,非特異(準射影的)多様体 S に対し, 通常のように

$$H^{p,q}(S) = H^q(S, \Omega_S^p)$$

とおく。$H^{\cdot\cdot}(S) = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(S)$ は anticommutative bigraded ring になる。

Morphism $f: S \to T$ に対し, $f^*: H^{p,q}(T) \longrightarrow H^{p,q}(S)$ は環準同型 $f^*: H^{\cdot\cdot}(T) \longrightarrow H^{\cdot\cdot}(S)$ を引き起こす。f が proper な時には, 群の準同型

$$f_*: H^{p,q}(S) \longrightarrow H^{p-d, q-d}(T), \quad d = \dim S - \dim T$$

が定義でき, projection formula が成立つ。

更に, S 上の余次元 p の cycle Z に対して, その fundamental class $\{Z\} \in H^{p,p}(S)$ が定義される。Morphism $f: T \longrightarrow S$ に対して, cycle f^*Z が定義されれば $\{f^*Z\} = f^*\{Z\}$.
順像・積についても同様の性質が成り立つ。

$l \geq 0$ とする。$f: S \longrightarrow C_r(V)_d$ に対し

$$f^{\#}: H^{r+l, r}(V) \longrightarrow H^{l,0}(S)$$

を次のように定義する。

$$f^{\#}: H^{r+l,r}(V) \xrightarrow{pr_V^*} H^{r+l,r}(S \times V) \xrightarrow{\cdot\{Z\}} H^{m+l,m}(S \times V) \xrightarrow{pr_{S*}} H^{l,0}(S)$$

ここで，$\{Z\}$ は f に対応する $S\times V$ 上の cycle Z の fundamental class である。0-cycle に対しては，これは前の定義と一致する。

$S=\{s_0\}=$ 一点，$\ell=0$ の時には，$f^{\#}: H^{r,r}(V) \longrightarrow H^{0,0}(S)=k$ は cycle $f(s_0)\in C_r(V)_d$ の fundamental class $\{f(s_0)\}\in H^{r,r}(V)$ の決める linear form である。(1.3) に対応して，

<u>定理</u> (2.3)　(2.2) と同じ仮定の下で，各 $\ell\geqq 0$ について

$$f^{\#}=g^{\#}: H^{r+\ell,r}(V) \longrightarrow H^{\ell,0}(S)$$

これは $f^{\#}$ の "f についての線型性"，(2,2)，より，次の殆んど自明な性質から従う：$\omega\in H^{\ell,0}(S\times\mathbb{P}^1)$ とする。$a\in\mathbb{P}^1$ に対し $i_a: S\simeq S\times a\subset S\times\mathbb{P}^1$ とおくと，$i_0^*\omega=i_\infty^*\omega$.

<u>定義</u>　写像 $\kappa: S\longrightarrow CH_r(V)$ が <u>正則</u> とは，非特異多様体 T，(separable) proper surjective morphism $f: T\to S$，morphism $g: T\longrightarrow C_r(V)_{d_+}\times C_r(V)_{d_-}$ があり，図式

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C_r(V)_{d_+}\times C_r(V)_{d_-} \arrow[d] & \ni (X,Y) \arrow[d, mapsto] \\ S \arrow[r, "\kappa"] & CH_r(V) & \ni \text{cycle } (X-Y) \text{ の類} \end{tikzcd}$$

//

が可換となることである。

<u>例</u>. Sを射影的とする。 $z\in CH^p(S\times V)$ $(p+r=m=\dim V)$ に対し, 写像

$$\kappa: S\longrightarrow CH_r(V),\quad s\longmapsto z(s)$$

は正則である。実際 zの代表元 $Z=\sum n_i Z_i$ (Z_i: 既約) をとる。 zをとり変えて (κは変えずに), 射影 $Z_i\to S$ は全て全射にできる。その時, Sのある開集合S_0があり $s\in S_0$ に対し, $Z(s)$ が定義される。Zを正・負の部分に分ける: $Z=Z^+-Z^-$. $Z^+(s), Z^-(s)$ $(s\in S_0)$ も定義され, その次数を d_+, d_- とすると, morphism

$$:S_0\longrightarrow C_r(V)_{d_+}\times C_r(V)_{d_-},\quad s\longmapsto (Z^+(s), Z^-(s))$$

が得られる。これをSからの有理写像g_0とみて, その不確定点の解消gを考える。図式

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C_r(V)_{d_+}\times C_r(V)_{d_-} \arrow[d] \\ S \arrow[ur, dashed, "g_0"] \arrow[r, "\kappa"'] & CH_r(V) \end{tikzcd}$$

は可換で fは proper birational 故 κは正則.

<u>系</u>(2.4) 正則写像 $\kappa: S\to CH_r(V)$ に対し ("定義"の記号で),

$$\kappa^\#: H^{r+p,r}(V)\longrightarrow H^{p,0}(S),\quad \omega\mapsto f_*((pr_1\circ g)^\#\omega-(pr_2\circ g)^\#\omega)$$

は well-defined.

さて $k : S \longrightarrow CH_r(V)$ は上の例のものとする。
k の像は $CH_r(V)$ の中で 0 と代数的に同値な cycle 全体 $F^1CH_r(V)$ に含まれていると仮定しよう。$J_r(V)$ を p th intermediate Jacobian ($\simeq H^{2p-1}(V, \mathbb{R})/H^{2p-1}(V, \mathbb{Z})$) の algebraic part とする。標準全射 $F^1CH_r(V) \longrightarrow J_r(V)$ があり、
$h : S \xrightarrow{k} F^1CH_r(V) \longrightarrow J_r(V)$ は morphism となる。h は、
$h : S \longrightarrow \mathrm{Alb}\, S \xrightarrow{\bar{h}} J_r(V)$ と分解される。$J_r(V)$ の接空間は、自然に $H^{p-1,p}(V)$ の部分空間となり、

$$d\bar{h} : \mathrm{Alb}\, S \text{ の接空間} \longrightarrow J_r(V) \text{ の接空間} \subset H^{p-1,p}(V)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ H^{n-1,n}(S) \end{array} \quad (\dim S = n)$$

の dual が $k^\# : H^{r+1,r}(V) \longrightarrow H^{1,0}(S)$ である。

一般に 正則写像 $k_i : S \longrightarrow CH_r(V)$ $(i=1,2)$ に対して、$k_1 + k_2 : S \longrightarrow CH_r(V)$ も正則であり

$$(k_1+k_2)^\# = k_1^\# + k_2^\# : H^{r+l,r}(V) \longrightarrow H^{l,0}(S).$$

又 $k : S \longrightarrow CH_r(V)$ が正則写像、$f : T \longrightarrow S$ が morphism とし、$\varphi : CH_r(V) \longrightarrow CH_s(W)$ (W は非特異射影多様体) が、$\varphi(x) = y(x)$, $y \in CH^{n-s+r}(V \times W)$ $(\dim W = n)$ の形の写像の時、

$$\varphi \circ k \circ f : T \longrightarrow CH_s(W)$$

も正則であり、

$$(\varphi \circ K \circ f)^{\#} = f^{*} \circ K^{\#} \circ \mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{h} : H^{s+l,s}(W) \longrightarrow H^{l,0}(T)$$

が成立する。但し $\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{h} : H^{s+l,s}(W) \longrightarrow H^{r+l,r}(V)$ は

$\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{h}(\eta) = pr_{V*}(pr_W^{*}\eta \wedge \mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{h})$, $\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{h}$ は y の（代表の）fundamental class $\in H^{n-s+r,n-s+r}(V \times W)$ である。

§3. Cubic equivalence.

この§では，断らない限り k は任意標数の代数閉体とする。l-cubic equivalence は Samuel [Sa] により定義された。

<u>定義</u>. $l \geqq 1$ を整数とする。V 上の余次元 p の cycle X, Y が l-cube equivalent であるとは，l 個の curve $C_1, \cdots, C_l$, 各 C_j 上の二点 $a_j^{(0)}$, $a_j^{(1)}$, 及び，$C_1 \times \cdots \times C_l \times V$ 上の余次元 p の cycle Z があり，

(i) 全ての $i_1, \cdots, i_l = 0 \sim 1$ に対し $Z(a_1^{(i_1)}, \cdots, a_l^{(i_l)})$ が定義され，

(ii) $$X - Y = \sum_{i_1, \cdots, i_l = 0,1} (-1)^{i_1 + \cdots + i_l} Z(a_1^{(i_1)}, \cdots, a_l^{(i_l)})$$

が成り立つことである。

<u>例</u>. $l=1$ の時，curve C と C の上の点 $a^{(0)}$, $a^{(1)}$ 及び，$C \times V$ 上の cycle Z があり $X - Y = Z(a^{(0)}) - Z(a^{(1)})$ という条件であり，これは代数同値に他ならない。

14

$Z(a^{(0)}) - Z(a^{(1)})$ は "関数 $a \mapsto Z(a)$" の階差とみられることに注意しよう。

(ii) $l=2$ の時、上の(ii)の右辺は、

$$Z(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(0)}, a_2^{(1)}) + Z(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$$

$$= \{Z(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(0)})\} - \{Z(a_1^{(0)}, a_2^{(1)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})\}$$

と書ける。第一の{ }は "関数 $a_1 \mapsto Z(a_1, a_2^{(0)})$" の階差、第二の{ }は、"関数 $a_1 \mapsto Z(a_1, a_2^{(1)})$" の階差である。従って(ii)の右辺は "$(a_1, a_2) \mapsto Z(a_1, a_2)$" の2階の階差である。これを square equivalence という。所謂、Theorem of square は divisor については square equivalence と有理同値が一致するという定理である。

同様に X と Y が l-cube equivalent とは $X-Y$ が適当な "$(a_1, \cdots, a_l) \mapsto Z(a_1, \cdots, a_l)$" の l 階の階差に書けることである。

注意. 一般には、定義の中で、全ての $(a_1, \cdots, a_l) \in C_1 \times \cdots \times C_l$ に対し $Z(a_1, \cdots, a_l)$ が定義できるとは限らない。

便宜上 全ての cycle は 0-cube equivalent とする。

命題[Sa]. (i) l-cubic equivalence は adequate equivalence relation である。特に全ての l に対し、有理同値は l-cubic equivalence より細かい。

(ii) $(l+1)$-cubic equivalence は l-cubic equivalence より細かい。

(iii) V 上の cycle X が 0 と l-cube equivalent で、W 上の cycle Y が 0 と l'-cube equivalent ならば、$V\times W$ 上の cycle $X\times Y$ は 0 と $(l+l')$-cube equivalent である。

$F_l^l CH^p(V) = \{V$ 上 0 と l-cube equivalent な余次元 p の cycle$\}$ mod rational equivalence

とおく。さらに $F_l^l CH_r(V) = F_l^l CH^p(V)$ $(p+r=\dim V)$,

$F_l^l CH^{\cdot}(V) = \bigoplus_p F_l^l CH^p(V)$ とおく。命題の (ii) より

$$CH^p(V) = F_l^0 CH^p(V) \supset F_l^1 CH^p(V) \supset \cdots \supset F_l^l CH^p(V) \supset F_l^{l+1} CH^p(V) \supset \cdots$$

即ち、$CH^p(V)$ に $F_l^{\cdot} CH^p(V)$ により filtration が入る。

又 (i) から $F_l^l CH^{\cdot}(V)$ は $CH(V)$ の ideal であり $f: V \to W$ に対し、

$$f_* F_l^l CH_r(V) \subset F_l^l CH_r(W),$$

$$f^* F_l^l CH^p(W) \subset F_l^l CH^p(V)$$

が成立する。

$$gr^l CH^p(V) = gr^l CH_r(V) = F_l^l CH^p(V) / F_l^{l+1} CH^p(V),$$

$$gr^{\cdot} CH^{\cdot}(V) = \bigoplus_{l,\, p\geq 0} gr^l CH^p(V)$$

とおく。命題の (iii) より $gr^{\cdot} CH^{\cdot}(V)$ には自然に bigraded

16

ringの構造が入る。Morphism $f: V \to W$ に対し

$$f^*: gr^{\cdot}CH^{\cdot}(W) \longrightarrow gr^{\cdot}CH^{\cdot}(V)$$

は、bigraded ringの準同型となる。更に、

$$f_*: gr^{\ell}\,CH_r(V) \longrightarrow gr^{\ell}CH_r(W)$$

も定義される。

例 (i) $p=0$ ならば もちろん $F^0CH^0(V) \cong \mathbb{Z}$　$F^1CH^0(V)=0$.

(ii) $p=1$ ならば、上に述べた様に $F^2CH^1(V)=0$.

従って、　$0 \longrightarrow gr^1CH^1(V) \longrightarrow CH^1(V) \longrightarrow gr^0CH^1(V) \longrightarrow 0$

は 完全系列で、$gr^1CH^1(V)$ は V の Picard 多様体、

$gr^0CH^1(V)$ は V の Neron-Severi 群で有限生成 abel 群

である。

(iii) $h: F^1CH^p(V) \longrightarrow A$ が abel 多様体への群の準同型

とし、次の性質をもつとする：任意の W,

$u \in CH^p(W \times V)$, $w_0 \in W$ に対して、

$$W \longrightarrow F^1CH^p(V) \xrightarrow{h} A$$

は morphism, 但し $W \to F^1CH^p(V)$ は $w \mapsto u((w)-(w_0))$.

その時、$h(F^2CH^p(V))=0$ である。従って $F^2CH^p(V) \neq 0$

ならば $F^1CH^p(V)$ に"よい abel 多様体の構造"は入らない。

(iv) V が (smooth complete) curve $C_1, \cdots, C_m$ の積とする：

7

$V = C_1 \times \cdots \times C_m$. $h : F^1CH_0(V) \longrightarrow \mathrm{Alb}\,V$ を標準的写像とすると，h は (iii) の性質を持ち，$h(F^2CH_0(V)) = 0$，故に

$$\bar{h} : gr^1CH_0(V) \longrightarrow \mathrm{Alb}\,V$$

が定義できる。V が上の形の時，これは同型となる。

l-cubic equivalence の定義において，C_i $(1 \le i \le l)$ を l 個の非特異多様体としても同じ同値関係が得られる。或いは C_i は Jacobi 多様体としてもよい。このことから $F^lCH^p(V)$ は次のようにも書ける：

A を abel 多様体とし，$I_A = F^1CH_0(A)$ とおく。

$\mu : A \times A \longrightarrow A$ を A の和とし，

$$\begin{array}{rccc} * : & CH(A) \times CH(A) & \longrightarrow & CH(A) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \longmapsto & \mu_*(x \times y) =: x * y \end{array}$$

を Pontrjagin 積とする。

$$\overbrace{I_A \times \cdots \times I_A}^{l\text{個}} \longrightarrow CH_0(A), \quad (x_1, \cdots, x_l) \longmapsto x_1 * \cdots * x_l$$

の像により生成された $CH_0(A)$ の部分群を I_A^{*l} とする。I_A^{*l} は Bloch [B] により調べられていて，$I_A^{*(l+1)} = 0$，$(l = \dim A)$ である。

任意の l に対し，$\alpha \in I_A^{*l} \subset F^lCH_0(A)$，$u \in CH^p(A \times V)$ ならば $u(\alpha) \in F^lCH^p(V)$ であるが，"逆" もいえる。

$F^{\ell}CH^{p}(V)=\{x\in CH^{p}(V)\,;\ $abel多様体$A$, $u\in CH^{p}(A\times V)$, $\alpha\in I_A^{*\ell}$があり$x=u(\alpha)\}$.
別のいい方をすれば, 全ての$I_A^{*\ell}$ (A: abel多様体)を"含む"最小の adequate equivalence relation が ℓ-cubic equivalence である。

Swan によって, $k=\overline{\mathbb{F}}_q$ ならば $I_A^{*2}=0$ である[B].
従って次の定理が成立する。

<u>定理</u> $k=\overline{\mathbb{F}}_q$ ならば任意(余)次元の cycle に対して square の定理 $F^{2}CH^{p}(V)=0$ が成り立つ。もっと explicit には, V, W_1, W_2 を $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の非特異射影多様体, Z を $W_1\times W_2\times V$ 上の余次元 p の cycle, $a_i^{(0)}, a_i^{(1)}\in W_i$ (閉点)とする。その時 cycle

$$Z(a_1^{(0)},a_2^{(0)})-Z(a_1^{(1)},a_2^{(0)})-Z(a_1^{(0)},a_2^{(1)})+Z(a_1^{(1)},a_2^{(1)})$$

が定義されれば, これは 0 と有理同値である。

§4. Cubic equivalence と Hodge cohomology.

この§では, §2の結果を cubic equivalence の場合に拡張する。再び $k=\mathbb{C}$ とし, $V\subset\mathbb{P}^N$ と $\ell\geqslant 0$ を固定する。

<u>定理</u>(4.1)

$\{(X,Y)\in C_r(V)_d\times C_r(V)_d\,;\ X$と$Y$は$V$上の cycle として ℓ-cube equivalent$\}$

19

は $Cr(V)_d \times Cr(V)_d$ の可算個の閉集合の合併である。

"Homotopy定理" も成立するが、かなり複雑になる。

定理(4.2) $f, g: S \longrightarrow Cr(V)_d$ は morphism で 各 $s \in S$ に対して、$f(s)$ と $g(s)$ は ℓ-cube equivalent とする。その時、非特異多様体 T, dominant morphism $e: T \longrightarrow S$, T上の曲線族 $\mathcal{C}_i$ $(i=1, \cdots, \ell)$ (即ち smooth proper な $\pi_i: \mathcal{C}_i \longrightarrow T$ があり fibre の次元は 1 且つ $\pi_{i*}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i}) = \mathcal{O}_T$), 各 i に対して $\mathcal{C}_i/T$ の section $s_i^{(0)}, s_i^{(1)}: T \longrightarrow \mathcal{C}_i$, 及び 有理写像

$$H: \mathcal{C}_1 \underset{T}{\times} \cdots \underset{T}{\times} \mathcal{C}_\ell \dashrightarrow Cr(V)_{d_1} \times Cr(V)_{d_2}$$

があり、次の i), (ii) を充す:

(i) 全ての $i_1, \cdots, i_\ell = 0 \sim 1$ に対して $\mathrm{Im}(s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})$ は H の定義域に含まれる。但し

$$s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)}: T = T \underset{T}{\times} \cdots \times T \longrightarrow \mathcal{C}_1 \underset{T}{\times} \cdots \underset{T}{\times} \mathcal{C}_\ell$$

は $s_1^{(i_1)}, \cdots, s_\ell^{(i_\ell)}$ の積である。

(ii) T から $Cr(V)_{d+2^{\ell-1}(d_1+d_2)}$ への morphism として、

$$f \circ e + \sum_{i_1 + \cdots + i_\ell \equiv 0} pr_1 \circ H \circ (s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})$$

$$+ \sum_{i_1 + \cdots + i_\ell \equiv 1} pr_2 \circ H \circ (s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)}) =$$

$$= g\circ e + \sum_{i_1+\cdots+i_\ell\equiv 1} pr_1\circ H\circ(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)})$$
$$+ \sum_{i_1+\cdots+i_\ell\equiv 0} pr_2\circ H\circ(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)}),$$

ここで和$\sum_{i_1+\cdots+i_\ell\equiv 0}$は，$i_1,\cdots,i_\ell = 0 \sim 1$で，$i_1+\cdots+i_\ell\equiv 0 \pmod 2$となる組全部に渡る。$\sum_{i_1+\cdots+i_\ell\equiv 1}$も同様である（(i)により morphism $H\circ(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)}): T \longrightarrow C_r(V)_{d_1}\times C_r(V)_{d_2}$は定義できる）。

証明の基本的ideaは、(2.1),(2.2)と同じであるが、記号が煩雑になることを別にして次の様な理由で、技術的に難しくなる。

(i) ℓ-cubic equivalenceの定義も(2.1)の証明のように、写像の形にいい直すのであるが、§3で注意したように$Z(a_1,\cdots,a_\ell)$が全ての$(a_1,\cdots,a_\ell)$で定義できないので、有理写像を扱わなくてはならず、有理写像のつくるschemeを考えなくてはならない。

(ii) 有理同値の場合、cycleのparameter spaceは$\mathbb{P}^1$であったが、今の場合，curve（の積）であり、moduliをもつので、parameter spaceも"動く"。これに応じて，有理写像のつくるschemeは，"curveのmoduli（又はfamily）"上の有理写像の族のつくるschemeにする必要がある。

21

(iii) $\mathbb{P}^1$ 上の(相異なる)二点は等質性により 0 と ∞ に標準化できるが genus ≥ 1 の curve ではそうでないので curve 上の全ての点を尊重する必要がある。従って curve の積上の 2^ℓ 個の点と、curve の積から Chow scheme への有理写像の組で、その 2^ℓ 個の点で有理写像が定義されている ものを（のつくる scheme を）考えなくてはならない。

以上のことを考慮すれば (2.1), (2.2) と "parallel" に証明できる。詳細は [H] をみて下さい。

さて (4.2) から (2.3) の類似が導びかれる。

定理 (4.3). $k: S \longrightarrow CH_r(V)$ を正則写像とし、$\mathrm{Im}\, k \subset F^\ell CH_r(V)$ とする。$0 \leq \ell' < \ell$ に対して、

$$0 = k^\#: H^{r+\ell', r}(V) \longrightarrow H^{\ell', 0}(S)$$

これは ℓ' 次函数の ℓ 階階差が 0 であることに対応する。証明は、先づ次の主張に帰着される：

"(4.2) の記号と仮定の下で、$\ell' < \ell$ ならば

$$f^\# = g^\#: H^{r+\ell', r}(V) \longrightarrow H^{\ell', 0}(S).$$ "

[H] では、(4.2) において C_i を abel 多様体の族に置き換えたものが成り立つことにより解析的な方法でこれを示したが、次のように代数的にも示せる。(4.2) を使い

(2.3) でしたように次に帰着される。

<u>補題</u> S は非特異多様体，$\mathscr{C}_1, \cdots, \mathscr{C}_\ell$ は S 上の曲線族，$s_i^{(0)}, s_i^{(1)} : S \to \mathscr{C}_i$ を $\mathscr{C}_i/S$ の section とする，$i=1,\cdots,\ell$。$i_1, \cdots, i_\ell = 0 \sim 1$ に対して $s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)} : S \to \mathscr{C}_1 \underset{S}{\times} \cdots \underset{S}{\times} \mathscr{C}_\ell$ による引き戻し $(s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : H^0(\mathscr{C}_1 \underset{S}{\times} \cdots \underset{S}{\times} \mathscr{C}_\ell, \Omega^{\ell'}) \to H^0(S, \Omega^{\ell'})$ を考える。$\ell' < \ell$ ならば

$$0 = \sum_{i_1, \cdots, i_\ell = 0,1} (-1)^{i_1 + \cdots + i_\ell} (s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : H^0(\mathscr{C}_1 \underset{S}{\times} \cdots \underset{S}{\times} \mathscr{C}_\ell, \Omega^{\ell'}) \to H^0(S, \Omega^{\ell'}).$$

補題の証明の為，一般論を思い出そう：$f : X \to S$ を非特異多様体の間の smooth morphism とする。完全系列

$$0 \to f^*\Omega_S^1 \to \Omega_X^1 \to \Omega_{X/S}^1 \to 0$$

がある。これから，

$$F^p \Omega_X^{\ell'} = \mathrm{Im}\,(\Omega_X^{\ell'-p} \otimes f^*\Omega_S^p \to \Omega_X^{\ell'})$$

により $\Omega_X^{\ell'}$ に filtration

$$\Omega_X^{\ell'} = F^0\Omega_X^{\ell'} \supset F^1\Omega_X^{\ell'} \supset \cdots \supset F^p\Omega_X^{\ell'} \supset F^{p+1}\Omega_X^{\ell'} \supset \cdots$$

が入り，$Gr_F^p \Omega_X^{\ell'} = F^p\Omega_X^{\ell'}/F^{p+1}\Omega_X^{\ell'} \simeq \Omega_{X/S}^{\ell'-p} \otimes f^*\Omega_S^p$。そして次の spectral sequence がある：

$$(E_f) \quad E_1^{p,q} = R^{p+q} f_* \, Gr_F^p \Omega_X^{\ell'} \Longrightarrow R^{p+q} f_* \Omega_X^{\ell'}.$$

Y が非特異多様体，$g : Y \to S$ が smooth morphism ならば同様に，g により $\Omega_Y^{\ell'}$ に filtration $\{F^p\Omega_Y^{\ell'}\}$ が入り，$Gr_F^p \Omega_Y^{\ell'} = \Omega_{Y/S}^{\ell'-p} \otimes g^*\Omega_S^p$.

として spectral seq. (E_g) $E_1^{p,q} = R^{p+q} g_* Gr_F^p \Omega_Y^{l'} \Rightarrow R^{p+q} g_* \Omega_Y^{l'}$ を得る。
$h: Y \longrightarrow X$ が S-morphism ならば $h^*: h^*\Omega_X^{l'} \longrightarrow \Omega_Y^{l'}$ により $F^p\Omega_X^{l'}$ は $F^p\Omega_Y^{l'}$ に写され $h^*: h^* Gr_F^p \Omega_X^{l'} \longrightarrow Gr_F^p \Omega_Y^{l'}$ が定義される。更に $h^*: H^n(X, \Omega_X^{l'}) \longrightarrow H^n(Y, \Omega_Y^{l'})$ を S について localize することにより

$h^*: R^n f_* \Omega_X^{l'} \longrightarrow R^n g_* \Omega_Y^{l'}$ が得られ, spectral seq (E_f) から (E_g) への (spectral seq としての) morphism が得られる。その E_1-term は $h^*: h^* Gr_F^p \Omega_X^{l'} \longrightarrow Gr_F^p \Omega_Y^{l'}$ から導びかれる。これを先づ次の状況に応用する。$g: Y \to S$ を smooth morphism, $\mathcal{C}$ を S 上の曲線族とし, $X = Y \times_S \mathcal{C}$, $f: X \longrightarrow S$ とする。

$$\begin{tikzcd} X = Y \times_S \mathcal{C} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "f"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

従って 2つの spectral seq

(イ) $R^{p+q} f_* Gr_F^p \Omega_X^{l'} \Longrightarrow R^{p+q} f_* \Omega_X^{l'}$

(ロ) $R^{p+q} g_* Gr_F \Omega_Y^{l'} \Longrightarrow R^{p+q} g_* \Omega_Y^{l'}$

が得られる。$\mathcal{C}/S$ が二つの section $s_i: S \longrightarrow \mathcal{C}$ $(i=1,2)$ を持つとしよう。各 $s_i: S \to \mathcal{C}$ は, S-morphism

$$\bar{s}_i = id_Y \times_S s_i : Y = Y \times_S S \longrightarrow Y \times_S \mathcal{C} = X$$

を引き起し, $\bar{s}_i$ は spectral seq. (イ) から (ロ) への morphism $\bar{s}_i^*$ を導びく。その時 $\Delta = \bar{s}_1^* - \bar{s}_2^*$ も (イ) から (ロ) への morphism である。
$F^p R^n f_* \Omega_X^{l'}$, $F^p R^n g_* \Omega_Y^{l'}$ を (イ), (ロ) の abutment の filtration とする。

<u>Claim</u> $\Delta(F^p R^n f_* \Omega_X^{l'}) \subset F^{p+1} R^n g_* \Omega_Y^{l'}$.

Δ は E_1-term で zero であることを示そう, そうすれば E_∞-term

24

でもそうであり claim が得られる。

$R^u f_* Gr_F^p \Omega_X^{l'} = (R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'-p}) \otimes \Omega_S^p$, $R^u g_* Gr_F^p \Omega_Y^{l'} = (R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'-p}) \otimes \Omega_S^p$ であり

$$\begin{tikzcd} \Delta : R^u f_* Gr_F^p \Omega_X^{l'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & R^u g_* Gr_F^p \Omega_Y^{l'} \arrow[d, equal] \\ R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'-p} \otimes \Omega_S^p \arrow[r, "\Delta' \otimes id"] & R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'-p} \otimes \Omega_S^p \end{tikzcd}$$

ここで、$\Delta' : R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'-p} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'-p}$ は $\bar{s}_i : Y \longrightarrow X$ が引き起こす $\bar{s}_i^*$ の差である。従って $\Delta' = 0$ を示せばよい。$l'-p$ を改めて l' と書く。$\Omega_{X/S}^{l'} = \Omega_{Y/S}^{l'} \otimes_S \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \oplus \Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes_S \Omega_{\mathcal{E}/S}^1$ と Kunneth formula より

$$R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'} = \bigoplus_{u_1+u_2=u} \left(R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'} \otimes R^{u_2} \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \oplus R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes R^{u_2} \pi_* \Omega_{\mathcal{E}/S}^1 \right)$$

である。$R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'} \otimes R^{u_2} \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上、$\bar{s}_i^* : R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'}$ は

$$R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'} \otimes R^{u_2} \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \xrightarrow{id \otimes s_i^*} R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'} \otimes R^{u_2} (id_S)_* \mathcal{O}_S \longrightarrow R^{u_1+u_2} (g \times_S id_S)_* (\Omega_{Y/S}^{l'} \otimes_S \mathcal{O}_S) = R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'}$$

故 $u_2 > 0$ ならば零、$u_2 = 0$ ならば $\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_S$ から恒等写像、従って、$\Delta' = 0$。$R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes R^{u_2} \pi_* \Omega_{\mathcal{E}/S}^1$ 上、$\bar{s}_i^* : R^u f_* \Omega_{X/S}^{l'} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'}$ は

$$R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes R^{u_2} \pi_* \Omega_{\mathcal{E}/S}^1 \xrightarrow{id \otimes s_i^*} R^{u_1} g_* \Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes R^{u_2} (id_S)_* \Omega_{S/S}^1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow R^{u_1+u_2} (g \times_S id_S)_* (\Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes_S \Omega_{S/S}^1) \xrightarrow{id \otimes g^*} R^u g_* (\Omega_{Y/S}^{l'-1} \otimes \Omega_{Y/S}^1) \xrightarrow{\wedge} R^u g_* \Omega_{Y/S}^{l'}$$

で、$\Omega_{S/S}^1 = 0$ 故 $\bar{s}_i^* = 0$、∴ $\Delta' = 0$ である。claim は示された。

以上の準備の下で補題を示そう。

$X_0 = S$, $X_i = X_{i-1} \times_S \mathcal{E}_i$, $f_0 = id_S$, $f_i : X_i \longrightarrow S$ $(i=1,\cdots,l)$ とする

$$\begin{tikzcd} X_i = X_{i-1} \times_S \mathcal{E}_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f_i"] & \mathcal{E}_i \arrow[d] \\ X_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"'] & S \end{tikzcd}$$

$\ell' < \ell$ の時，引き戻し $(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell *}(\Omega^{\ell'}_{X_\ell}) \longrightarrow \Omega^{\ell'}_S$ について

$$0 = \sum_{i_1,\cdots,i_\ell=0,1} (-1)^{i_1+\cdots+i_\ell}(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell *}(\Omega^{\ell'}_{X_\ell}) \longrightarrow \Omega^{\ell'}_S$$

を示せば充分である。$i=1,\cdots,\ell$，$j=0,1$ に対し，

$$\bar{s}_i^{(j)} = id \underset{S}{\times} s_i^{(j)} : X_{i-1} = X_{i-1}\underset{S}{\times} S \longrightarrow X_{i-1}\underset{S}{\times} C_i = X_i$$

は，$\bar{s}_i^{(j)*} : f_{i*}(\Omega^{\ell'}_{X_i}) \longrightarrow f_{i-1*}(\Omega^{\ell'}_{X_{i-1}})$ を定める。

$$\Delta_i = \bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}_i^{(1)} : f_{i*}(\Omega^{\ell'}_{X_i}) \longrightarrow f_{i-1*}(\Omega^{\ell'}_{X_{i-1}})$$

とおくと，

$$\Delta_1\circ\cdots\circ\Delta_\ell = \sum_{i_1,\cdots,i_\ell=0,1} (-1)^{i_1+\cdots+i_\ell}(s_1^{(i_1)}\times\cdots\times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell *}(\Omega^{\ell'}_{X_\ell}) \longrightarrow \Omega^{\ell'}_S$$

である。$F^p f_{i*}\Omega^{\ell'}_{X_i}$ を f_i に対する spectral seq. (E_{f_i}) によって決まる $f_{i*}\Omega^{\ell'}_{X_i}$ 上の filtration とする。Claim を $Y = X_{i-1}$，$C = C_i$，$s_j = s_i^{(j)}$ に適用して

$$\Delta_i(F^p f_{i*}\Omega^{\ell'}_{X_i}) \subset F^{p+1} f_{i-1*}\Omega^{\ell'}_{X_{i-1}} \qquad (p \geqq 1).$$

$f_{\ell*}\Omega^{\ell'}_{X_\ell} = F^0 f_{\ell*}\Omega^{\ell'}_{X_\ell}$ 故，帰納的に

$$\Delta_1\circ\cdots\circ\Delta_\ell(f_{\ell*}\Omega^{\ell'}_{X_\ell}) \subset F^\ell f_{0*}\Omega^{\ell'}_{X_0} = F^\ell\Omega^{\ell'}_S.$$

$\ell' < \ell$ の時　$F^\ell\Omega^{\ell'}_S = \mathrm{Im}(\Omega^{\ell'-\ell}_S \otimes \Omega^\ell_S \longrightarrow \Omega^{\ell'}) = 0$，補題は示された。

(4.3) で　$\ell = \ell'$ の時には，$\kappa^\# = 0$ とは限らない。

反例　$V = C_1\times\cdots\times C_\ell$ を曲線の積とする。各 i について $a_i \in C_i$ をとる。$S = V$ として　$\kappa : S \longrightarrow CH_0(V)$ を

$$\kappa(x_1,\cdots,x_\ell) = ((x_1)-(a_1))\times\cdots\times((x_\ell)-(a_\ell))$$

で定義すると　$\kappa^\# : H^{\ell',0}(V) \longrightarrow H^{\ell',0}(S)$ は　$\ell' < \ell$ ならば

26

零であるが $\ell=\ell'$ ならば恒等写像である。従って $F^{\ell}(CH_0(V))\neq 0$.

$S=V$ を abel 曲面とする。$0\neq a\in V$ に対して、$\kappa: S\longrightarrow CH_0(V)$ を

$$\kappa(x)=(x+a)-(x)$$

で定義する。$\kappa^{\#}: H^{\ell',0}(V)\longrightarrow H^{\ell',0}(S)$ は $\ell'=0,1,2$ に対して零であるが、$\mathrm{Im}\,\kappa\not\subset F^2(CH_0(V))$, 従って (4・3) の逆はいえない (cf. [Se]).
$\kappa^{\#}=0$, $\ell'=0,1,2$ は "逆" の仮定より強いことに注意。

$\mathcal{C}^p(V)$ を V上の余次元 p の cycle の fundamental class 全体で生成された $H^{p,p}(V)$ の部分空間とする。$H^{0,1}(V)$ の元の i 個の積で生成された $H^{0,i}(V)$ の部分空間を $(H^{0,1}(V))^{\cdot i}$ と書く。
$p\leq q$ に対し $u(x)$ ($u\in\mathcal{C}^{p+\dim W}(W\times V)$, $x\in(H^{0,1}(W))^{\cdot(q-p)}$, Wは非特異射影的) の形の元で (など) 生成された $H^{p,q}(V)$ の部分空間を ${}^{\#}H^{p,q}(V)$ とする。$p>q$ の時は ${}^{\#}H^{p,q}(V)=0$ とする。${}^{\#}H^{\cdot\cdot}(V)=\bigoplus_{p,q}{}^{\#}H^{p,q}(V)\subset H^{\cdot\cdot}(V)$ とおく。
${}^{\#}H^{\cdot\cdot}(V)$ は $H^{\cdot\cdot}(V)$ の部分環で、morphism $f:V\to W$ に対し $f^*: H^{\cdot\cdot}(W)\longrightarrow H^{\cdot\cdot}(V)$ は (環準同型) $f^*: {}^{\#}H^{\cdot\cdot}(W)\longrightarrow {}^{\#}H^{\cdot\cdot}(V)$ を引き起こし、$f_*: H^{p,q}(V)\longrightarrow H^{p-d,q-d}(W)$ ($d=\dim V-\dim W$) は $f_*: {}^{\#}H^{p,q}(V)\longrightarrow {}^{\#}H^{p-d,q-d}(W)$ を定義する。Rough に云えば、${}^{\#}H^{\cdot\cdot}(?)$ は $\mathcal{C}^{\cdot}(?)$ と $H^{0,1}(?)$ で生成される。

27

<u>命題</u> $\dim {}^{\#}H^{0,q}(V)$ は V の双有理不変量である。

<u>例</u> (i) ${}^{\#}H^{0,1}(V) = H^{0,1}(V)$, ${}^{\#}H^{p,p}(V) = \mathfrak{A}^{p}(V)$. である.

(ii) ${}^{\#}H^{p-1,p}(V)$ は V の p^{th} intermediate Jacobian の代数的部分の接空間と同一視される。

(iii) 一般に ${}^{\#}H^{p,q}(V)$ の計算は難しい。V が abel 多様体，又は curve の積ならば

$${}^{\#}H^{p,q}(V) \neq 0, \qquad 0 \leq {}^{\forall}p \leq {}^{\forall}q \leq \dim V.$$

W が abel 多様体 V に伴う Kummer 多様体とすれば

$${}^{\#}H^{p,q}(W) \neq 0, \quad 0 \leq p \leq q \leq \dim W, \quad p+q \equiv 0 \pmod 2$$

である。

K の反例と (4.3) から

<u>定理</u> (4.4) ${}^{\#}H^{p-\ell,p}(V) \neq 0$ ならば $gr^{\ell}CH^{p}(V) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$.

<u>例</u> V が abel 多様体ならば $gr^{\ell}CH^{p}(V) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, $0 \leq \ell \leq p \leq \dim V$ である。W が V に伴う Kummer 多様体ならば

$$gr^{\ell}CH^{p}(W) \otimes \mathbb{Q} \neq 0, \qquad \ell \equiv 0 \pmod 2, \ 0 \leq \ell \leq p \leq \dim W.$$

である。

REFERENCES.

[B] Bloch, S.: Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties, Inv. Math. 37 (1975), p. 215.

[M] Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 9 (1969), p. 195

[R1] Roitman, A.A.: Γ-equivalence of zero-dimensional cycles, Mat. Sb. Tom 86 (128) (1971) = Math. USSR Sb. 15 (1971), p. 555.

[R2] ———— : Rational equivalence of zero-cycles, Mat. Sb. Tom 86 (131) (1972) = Math. USSR, Sb. 18 (1972), p. 571

[Sa] Samuel, P.: Relations d'équivalence en géométrie algébrique, Proc. Int. Congress Math. 1958

[Se] Severi, F.: Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche, Comm. Pont. Acc. Sci., o in Geometria dei sistemi algebrici ..., III

[H] Saito, H: The Hodge cohomology and cubic equivalences, preprint.